حالات في التكاملات الجزئية

1) إذا كان من الشكل $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ أو $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

نفرض $x = a\sin\theta$

$dx = a\cos\theta\, d\theta$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \Rightarrow \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$

نفرض:

$x = a\sinh\theta$

$dx = a\cosh\theta\, d\theta$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \Rightarrow \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

$x = a\cosh\theta$

$dx = a\sinh\theta\, d\theta$

• بعض قوانين المثلثية:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = 2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}, \quad \cosh x = \cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2}$$

$$\cosh^2 x = \frac{1+\cosh 2x}{2}, \quad \sinh^2 x = \frac{-1+\cosh 2x}{2}$$

$$\boxed{\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1}$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$$

$x = 4\cosh\theta \longrightarrow dx = 4\sinh\theta\, d\theta$

$$4\int \frac{1}{\sqrt{\quad}} \sinh\theta\, d\theta$$

$$= \operatorname{arcosh}\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2-16}$$

$x = a\cosh\theta \longrightarrow dx = 4\sinh\theta\, d\theta$

$$4\int \sqrt{16\cosh^2\theta - 16}\ \sinh\theta\, d\theta$$

$$16\int \sqrt{\cosh^2\theta - 1}\ \sinh\theta\, d\theta$$

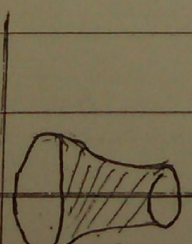
$$= 16\int \sqrt{\sinh^2\theta}\ \sinh\theta\, d\theta$$

$$= 16\int \sinh^2\theta\, d\theta.$$

* الحجم الدوراني:

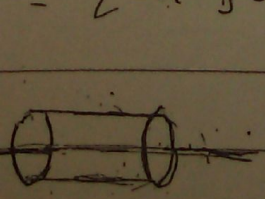
حساب الحجم الناتج عن دوران ساحة محدودة بالمنحنى $y = f(x)$ والمحور ox والمستقيمين $x = 0$ ، $x = b$

دوران حول المحور ox



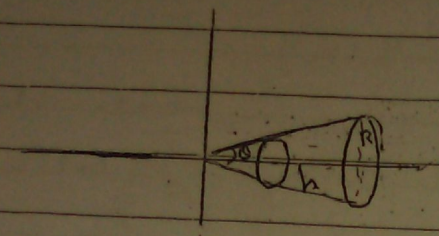
$$v = \pi \int y^2 . dx$$

- حجم حجم دوراني حول المحور الأفقي محصور بين منحنى $f(x)$ ومنحنى تابع $g(x)$ حيث $f(x)$ و $g(x)$ مستمرتين على المجال $[a, b]$



$$v = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right)$$

أوجد حجم مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h بدلالة

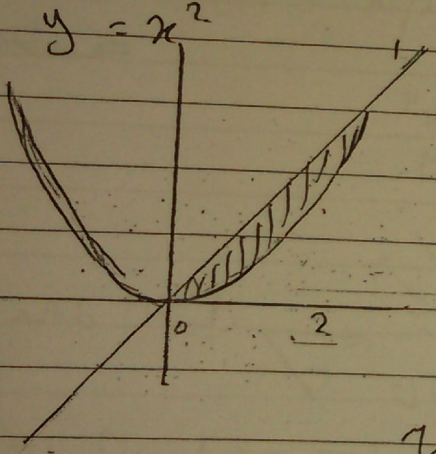


$$y = mx$$
$$m = \tan\theta = \frac{R}{h}$$
$$y = \frac{r}{h}x$$

$$v = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$
$$= \frac{\pi r^2}{3h^2}\left[x^3\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h^3}{3h^2} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

أوجد حجم الجسم الدوراني الناتج عن المنطقة المحددة بالمنحنى



$y = 2x$

$y = x^2$

$$2x = x^2$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x = 0 \quad x = 2$$

$$v = \pi \int_0^2 \left((4x^2) - x^4\right)$$

* المعادلات التفاضلية:

في حالة الشكل:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

تكون المعادلة تامة إذا كان

$$Py' = Qx$$

مثال: برهن أن المعادلة التالية تامة ثم أوجد الحل العام

$$\cos y\, dx + (2y - x\sin y)\, dy = 0$$

$p = \cos y \longrightarrow p'_y = -\sin y$

$q = 2y - x\sin y \longrightarrow p_{x'} = -\sin y$

$p_{y'} = q_{x'}$ معادلة تامة

نوجد تكامل الدالة و تكامل الثانية ونوحد الرموز بينهما.

$$\int \cos y\, dx = x\cos y$$
$$\int (2y - x\sin y)\, dy = y^2 + x\cos y$$

$x\cos y + y^2 = c$

$(y - 2x^3)\, dx + x\, dy = 0$

$p = (y - 2x^3) \longrightarrow p_{y'} = 1$

$q = x \longrightarrow q_{x'} = 1$

المعادلة تامة

$$\int y - 2x^3\, dx = yx - \frac{2x^4}{4}$$
$$\int x\, dy = yx$$
$$yx - \frac{x^4}{2} = c$$

في ايجاد عامل التكامل ← تابع لـ x / تابع لـ y

إذا كان تابع لـ x ⟸

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{p_{y'} - q_{x'}}{q}\right) dx}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{p_{y'} - q_{x'}}{-p}\, dy}$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية بعد أن تثبت أنها غير تامة.

$(x^2 + y^2 + x)\, dx + y\, dy = 0$

$p = x^2 + y^2 + x \longrightarrow p_{y'} = y$

$q = y \longrightarrow q_{x'} = 0$

المعادلة غير تامة $p_{y'} \neq q_{x'}$

$$\frac{py' - qx}{q} = \frac{2y - 0}{y} = 2$$

$$\mu(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل:

$$e^{2x}(x^2+y^2+x)\,dx + e^{2x} y\,dy = 0$$

$$p = e^{2x}(x^2+y^2+x)$$

$$\Rightarrow py' = 2y e^{2x}$$

$$q = e^{2x} y \longrightarrow qx' = 2y e^{2x}$$

$$py' = qx'$$

المعادلة تامة

↓

نكامل ونوجد الحلول المشتركة.